

用√符号选择一类	
教 学	√
科 研	
编号 (由专家组填写)	

## 第十一届全国高校物理实验教学研讨会 本科学生物理实验论文评比表

学生姓名：     娄泽坤    

申报学校：     复旦大学    

联系方式： 电话：     18738402676    

QQ：     809963432    

E-mail：     zklou19@fudan.edu.cn    

填表日期： 2021 年 07 月 02 日

全国高校物理实验教学研讨会组委会制

二〇二〇年一月

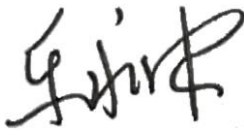
学 生 作 者 及 发 表 有 关 物 理 实 验 论 文 情 况	姓名	姜泽坤	性别	男	出生年月	2000.11.03
	学校名称	复旦大学				
	入学时间	2019年09月		毕业时间	2023年07月	
	学号	19307110256				
	参评论文：（题目、杂志名称、卷/期、页、年）					
	《摩擦振子行为的建模与研究》，物理与工程，已接收，未出版					
	（注：论文的第一作者必须为大学本科生，且其论文研究工作是在本科生阶段完成的，到现场答辩的为该论文的学生作者之一。）					
	论文作者情况（按发表论文作者顺序列出）：					
	姓名	身份	单位		作用/贡献	
	姜泽坤	学生	复旦大学		装置设计，实验方法设计，数据测量、论文写作	
黄俊涵	学生	复旦大学		实验方法设计，数据测量		
袁马轲	学生	复旦大学		实验数据测量		
乐永康	教授	复旦大学		指导装置设计与实验测量，联系装置制作、论文修改		

**简要介绍**（研究背景、问题、方法、创新点、学术及应用价值和引用情况等）：

教学中一般认为滑动摩擦系数为材料决定的恒定值，实际上摩擦副间相对速度和荷载大小都对摩擦系数的有直接影响。在 IYPT2020 课题“摩擦振子”的研究中，我们搭建合适的装置，得到重复性很好的摩擦振子实验仪。定量实验发现：摩擦振子振幅先随时间增加，然后受摩擦轮速度限制稳定在定值。本文具体讨论了装置设计与制作，数据处理方法，理论建模与测量结果分析。

本装置可以得到摩擦力使体系能量不断累积的现象。首先，本实验直观展示了摩擦系数与相对速度之间的关系，填补了相关教学领域空白。其次，通过测量实际摩擦系数，建立了理论与实验的明确对应，本结果亦可用于本科力学教学的题目练习。最后，本文中的摩擦振子演示仪，可以用于实际教学演示工作，便于学生理解摩擦力的相关现象与原因。

本论文尚未刊发，故无相关引用情况。

	指导教师姓名	乐永康	职称	教授
指导教师评语	<b>对学生发表论文评语及论文情况说明：</b>			
	<p>本文作者在大学一年级期间就通过不断优化设计，得到了满足摩擦振子课题研究所需要的实验仪。该实验仪能给出摩擦振子振幅先随时间增加，然后受摩擦轮速度限制稳定在定值、且重复性良好的实验结果。他们还搭建了辅助实验装置，定量测量了不同相对速度下的摩擦系数，给出了滑动摩擦系数随摩擦副相对速度增大而减小的实验结果。基于这一依赖关系，通过完整的物理建模，他们清晰、直观地解释了初始阶段、摩擦振子振幅逐渐增加的物理机制。本论文的研究结果对深入理解摩擦现象很有帮助。</p> <p>课题研究和论文写作的过程，体现了几位本科生有很扎实的基础知识，较强的实践能力和严谨求实、一丝不苟的科学态度。</p> <p>基于现有的装置和结果，学生团队还能进一步深化研究工作，以使研究工作更加系统，让我们对摩擦现象中的物理的认识更加全面。</p> <p>指导教师（签名）： 2021 年 07 月 02 日</p>			

学校推荐意见	负责人（签名）： _____ 公章 _____ 年 月 日
大会学术组专家意见	专家组组长（签名）： _____ 年 月 日
评比结果	理事长（签名） _____ 年 月 日

# 摩擦振子行为的建模与探究

娄泽坤, 黄俊涵, 袁马轲, 乐永康

复旦大学物理学系上海200433

## 摘要

一般认为滑动摩擦力正比于接触面之间的正压力, 而摩擦系数只和接触面材料有关, 与摩擦副之间的相对运动速度大小无关。在对IYPT2020第13课题“摩擦振子”的研究中, 我们搭建适用的实验设备, 得到摩擦振子振幅先随时间增大, 然后受摩擦轮转速限制而稳定在一定值的实验结果。由理论分析可知, 振幅随时间增大的现象是摩擦系数随摩擦副之间的相对速度增大而减小决定的。摩擦系数随速度变化的定量测量证明了这一依赖关系。

**关键词:** 滑动摩擦; 摩擦振子; 滑动摩擦系数测量; 物理建模

## Modelling and research on friction oscillator

LOU Zekun, HUANG Junhan, YUAN Make, LE Yongkang

Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433

## Abstract

It is usually believed in the college physics level that the sliding friction force is proportional to the positive pressure between the contact surfaces, where the friction coefficient depends only on the properties of the contact surface and is irrelevant to the relative speed between the friction pairs. For the research on the 13th topic of IYPT2020, “Friction Oscillator”, we built suitable experimental equipment and obtained repeatable experimental results that the amplitude of the friction oscillator first increased with time and then stabilized at a specific value limited by the speed of the friction wheel. This phenomenon indicates that the friction coefficient decreases with the increasing relative speed between the friction pairs, which is proved by our quantitative measurement of the friction coefficient.

**Keywords:** sliding friction; friction oscillator; measurement of the friction coefficient; physics modelling

# 1 引言

滑动摩擦力(以下简称摩擦力)是阻碍互相接触的两个表面之间相对运动的力<sup>[1]</sup>。深入的研究表明:滑动摩擦是一种复杂的非线性现象<sup>[2]</sup>。普通物理范畴的力学教材,一般简化认为摩擦力仅与接触面摩擦系数和正压力大小有关<sup>[3-5]</sup>,即 $F = \mu N$ ,其中 $\mu$ 是和接触面属性有关的常数。在大学物理实验教学中,定量探究摩擦力与摩擦系数的实验较少。而摩擦力在力学相关的实验中可谓无处不在,深入了解特定条件下的摩擦力大小,以及摩擦力随参数的变化规律,对深入解读力学实验的结果是非常有必要的。

2020年IYPT的题目13是Friction Oscillator(摩擦振子)。题目内容<sup>[6]</sup>为: A massive object is placed onto two identical parallel horizontal cylinders. The two cylinders each rotate with the same angular velocity, but in opposite directions. Investigate how the motion of the object on the cylinders depends on the relevant parameters. 题目要求,将一个具有较大质量的物体放在两个相互平行,水平放置且反向同速旋转的圆柱上,探究物体(以下简称振子)的运动规律随相关参数的变化。史雨川等人研究了这类摩擦振子在稳定时的运动轨迹并给出解释<sup>[7]</sup>,不过他们给出的“稳定运动”的周期数比较少,对少数几个周期运动轨迹的拟合已显示部分偏离,且研究没有包含运动初始过程,对振子运动规律的研究不够完整。

我们设计并制作了符合题目要求的实验装置,可以得到振子运动随相关参数变化的可重复的实验结果。我们发现:在初始阶段,振子振幅随时间增加;受摩擦轮转动线速度约束,振子随后进入振幅稳定的近谐振状态。振子幅度逐渐增加的过程表明:摩擦系数随摩擦副之间相对速度的增大而减小。摩擦系数随相对速度变化的定量测量证明了这一点。

## 2 系统设计和实验方法

### 2.1 装置设计一:滚筒加圆棒

图1所示装置满足IYPT题目所述要求。装置中,水平平行放置的两滚筒由电动机驱动、反向同速旋转,将一根长度超过2倍滚筒间距的圆柱形金属长棒(如铝棒)置于滚筒上面,作为往返运动的振子。图中限位器是为限制振子的运动自由度。若不加限位器,振子稍稍偏离与滚筒垂直的方向时,两个滚筒上的摩擦力力矩会使振子迅速转向滚筒的轴向。但实际实验中,振子在运动过程中会与限位器发生碰撞,对运动的规律性影响极大,不利于振子运动规律的研究。我们放弃了这种设计。

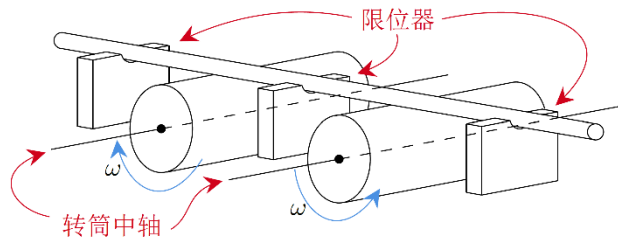


图 1: 双滚筒+限位器实验装置示意图

## 2.2 装置设计二：圆柱形摩擦轮与带凹槽振子

图2是我们最终设计的实验装置的实物图，两个摩擦轮用同一个直流电机驱动，分别通过齿轮与皮带的方式传动，确保反向共速旋转。设计中有两个特别考虑：(1) 振子采用带凹槽铝棒，槽侧壁嵌入表面光滑的钢质细棒，起到限位作用，保证振子运动的规律性。图3给出振子和摩擦轮结构的剖面图，限位的钢质细棒还有减小侧面摩擦及降低重心、提高稳定性的作用；(2) 根据限位细棒的内沿间距，摩擦轮选为厚度为10.0mm的薄圆柱体，为便于研究不同摩擦副时的规律，摩擦轮采用外轮可拆卸的结构设计，以便于进行对比实验。

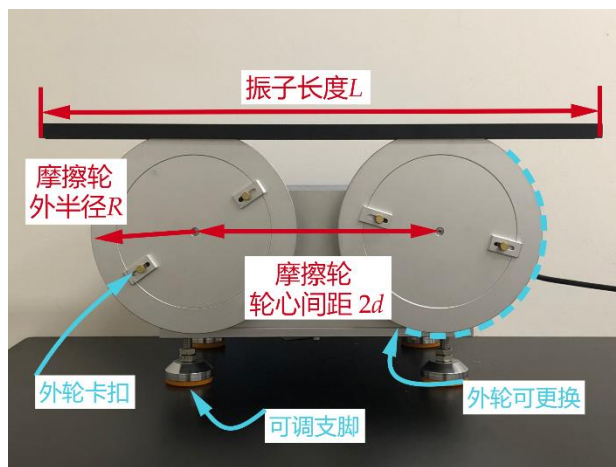


图 2: 实验装置图

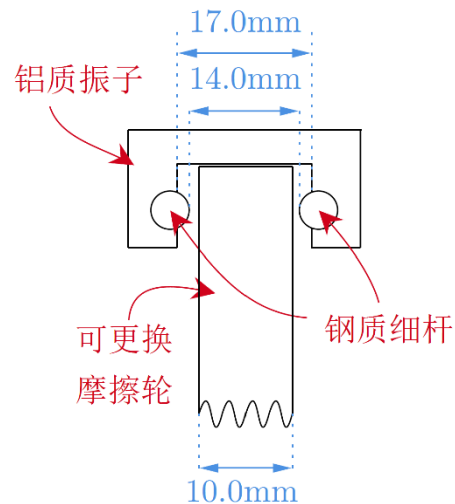


图 3: 振子约束方式剖面图

虽然IYPT题目并没有限定摩擦轮与振子的摩擦轮是内转还是外转（在振子与摩擦轮的两个接触点附近观察，内转即摩擦轮具有向内的速度，外转相反），但不难想到：在摩擦轮外转时，振子受到的摩擦力合力将使其往摩擦轮外侧运动，最终脱离摩擦轮，不会出现往复振荡的实验现象。而当摩擦轮向内转动时，摩擦力合力提供振子运动的回复力，振子将出现题目要求的振荡行为。因此，本文只讨论摩擦轮内转时的情形。另外，实验中，为能使振子的最大稳定振幅尽量大（即振子质心在两个接触点之间来回运动），振子长度必须大于2倍的摩擦轮轮心距。

实验时，先将摩擦轮转速设定为合适值，然后将振子搭在摩擦轮上释放(振子的中心尽量接近于系统的对称轴)，录制视频记录振子运动过程，定标视频中每个像素对应的长度，即可通过视频分析软件Tracker<sup>[8,9]</sup>追踪振子上标记物位置，导出振子位移随时间的变化数据，绘图即可得到摩擦振子的运动轨迹。对轨迹曲线上的相邻点作差分，即可得到振子运动的速率变化曲线。实验时，拍摄横向区域约1.0m，视频分辨率是1920 × 1080，帧率为30fps。

本实验中，Tracker软件自动追踪测量的主要不确定度来自振子上的标记点的定位不确定度，标记点在视频中轮廓清晰时，定位最大不确定度为两个像素，也即定位不确定度约1.0mm，远小于本实验中所讨论的长度尺度(即振子的振幅，为10cm数量级)。故本文不再考虑测量误差的影响。

## 2.3 摩擦系数测量

图4给出不同相对转速下的摩擦系数测量的装置示意图。振子一侧架在摩擦轮上，摩擦轮的转速连续可调，振子通过轴承支撑保持水平，另一端与IOLab的测力计<sup>[10]</sup>相连，IOLab 通过无线方式实时将振子在水平方向的受力数据传递到电脑，支撑轴承放置在电子天平上，可以实时监测垂直方向的受力大小。

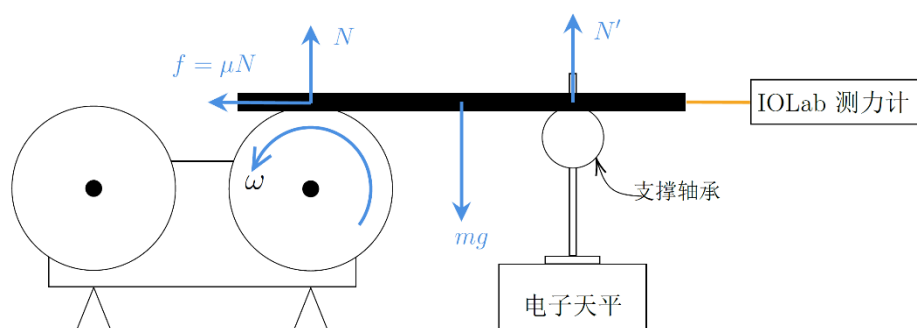


图 4: 摩擦系数测量方法示意图

## 3 摩擦振子运动建模

对特定的摩擦副，滑动摩擦力主要取决于接触面的温度状况<sup>[11]</sup>：接触面元因摩擦生热软化会出现从弹性到弹塑性的接触状态变化，因此，相对速度相同时，摩擦系数随载荷的增加而减小；除极小荷载条件外，摩擦系数随相对速度的变化是都非线性的。



为讨论简便，在实验涵盖的相对速度变化范围内，我们先取线性近似，设摩擦系数与速度的依赖关系可以写为：

$$\mu(v_r) = \mu_m - kv_r \quad (1)$$

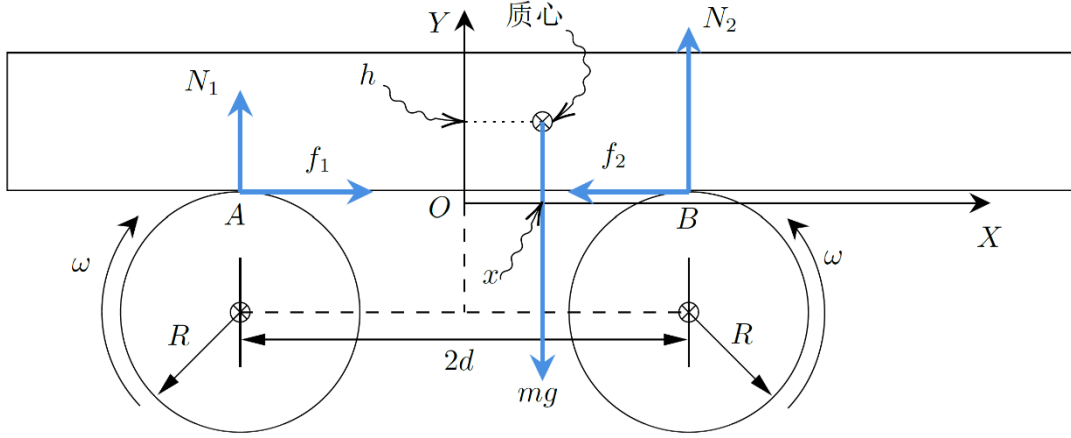


图 5: 理论模型示意图。正文讨论中用到的各个符号均已在图中标出

$k = 0$ 时，摩擦系数是常数，不随相对速度而变化； $k > 0$ 时，摩擦系数随相对速度增大而减小； $k < 0$ 时，摩擦系数随相对速度增大而减小。

如图5所示，我们以长方形物体作为振子示例。以两摩擦轮上边缘公切线为X轴，建立相对摩擦轮对称轴固定的坐标系OXY，振子质心高度为 $h$ 。假设 $t$ 时刻振子中心的水平位置为 $x$ ，因体系自带的约束条件，我们只需要讨论沿X轴的运动。

振子与两摩擦轮的接触点为A和B，振子受到作用于质心的重力 $mg$ ，两接触点上分别有支持力和摩擦力 $N_1, f_1, N_2, f_2$ 。

取点A为参考点，力矩平衡方程为：

$$mh\ddot{x} = -N_2 \cdot 2d + mg(d + x) \quad (2)$$

压力与重力的平衡方程为：

$$N_1 + N_2 = mg \quad (3)$$

质心在水平方向的受力方程为：

$$m\ddot{x} = f_1 + f_2 \quad (4)$$

根据文献[7]，对低速运动的金属块材，我们在此可以忽略空气阻力。将实际实验参数代入，发现振子质心高度 $h$ 对结果影响很小，我们在此将其忽略。

取摩擦系数为式(1)形式，可得到 $N_1$ 与 $f_1, N_2$ 与 $f_2$ 之间的关系。记 $\mu_0^* = \mu_m - kv_0$ ，其中 $v_0$ 为摩擦轮外沿速度。此时，联立方程(2)(3)(4)，可以解得

$$x = A \exp\left(\frac{kgt}{2}\right) \cos\left[\sqrt{\frac{\mu_0^* g}{d} - \left(\frac{kg}{2}\right)^2} t + \phi\right] \quad (5)$$

式(5)给出摩擦系数随速度的变化关系在线性近似下, 所得到的运动方程的解: 摩擦振子有周期性运动, 其振幅变化取决于 $k$ 的取值。可以看出: 当 $k > 0$ 时, 振子振幅将随时间呈 $e$ 指数增大; 当 $k = 0$ 时, 振子振幅将维持初始值; 当 $k < 0$ 时, 振子振幅将随时间呈 $e$ 指数减小。

根据振子的实际驱动形式, 容易想到, 式(5)的应用受到两个约束: (1)当振子的质心运动到支撑点外侧时, 振子不能保持水平状态, 受力及运动规律都会出现变化, 因此, 此公式只适用于振子振幅小于摩擦轮轮心距一半时的情况; (2)当质心保持在两个支撑点之间的情况下, 由于式(5)中的振动周期与振幅大小无关, 振幅的增大, 必然要求振子振荡有更大的最大线速度, 而此最大线速度又不能超过摩擦轮外沿的速度, 因此, 增幅增大的过程, 受摩擦轮最大线速度限制可能出现“饱和”。

## 4 实验结果和讨论

### 4.1 实验结果

为研究摩擦振子的物理模型, 本文采集的实验数据是在如下参数设置下的典型结果: 铝质摩擦轮外径 $R = 200.0(4)\text{mm}$ , 厚度 $10.0\text{mm}$ , 摩擦轮轮心间距 $2d = 240.0(5)\text{mm}$ , 摩擦轮转速 $50.1\text{rpm}$  (可调范围 $0 \sim 110\text{rpm}$ )。铝质振子长度 $L = 540.0(5)\text{mm}$ , 振子质量 $m = 459.0(5)\text{g}$ 。

图6给出摩擦轮转速 $50.1\text{rpm}$ 时振子质心的运动轨迹图, 其中时间零点取为在摩擦轮上释放振子的时间。振子运动可分为以下两个阶段: (1)  $0 \sim 7\text{s}$  内振幅增大阶段: 振子作往返运动且振幅不断增加, 近似满足 $e$ 指数增长 (如图6中红色虚线所示)。(2) 约 $7\text{s}$ 后的振幅稳定阶段: 振子仍往返运动, 振幅是稍有涨落的稳定值 (如图6中紫色虚线所示)。由此运动轨迹还可以看出: 振幅增大阶段和振幅稳定阶段的周期近似相等。

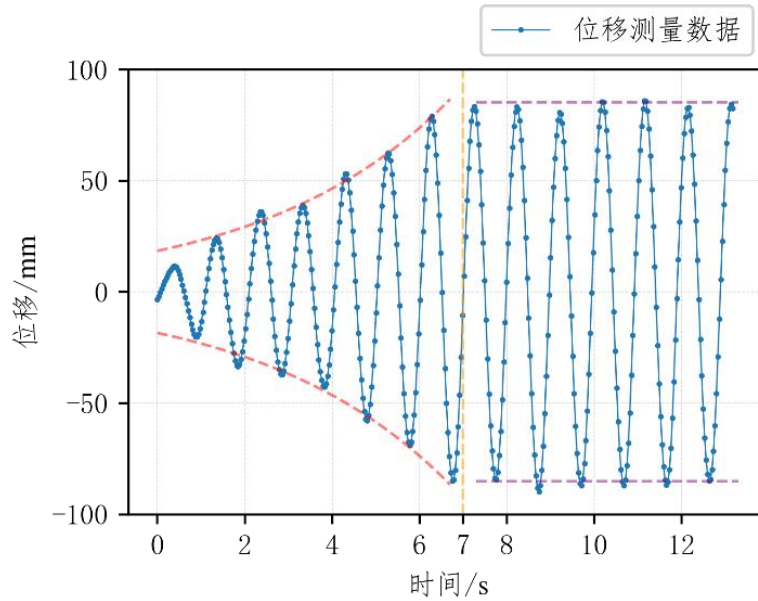


图 5: 振子运动典型情况: 位移随时间变化。  
摩擦轮转速为 $0.525\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

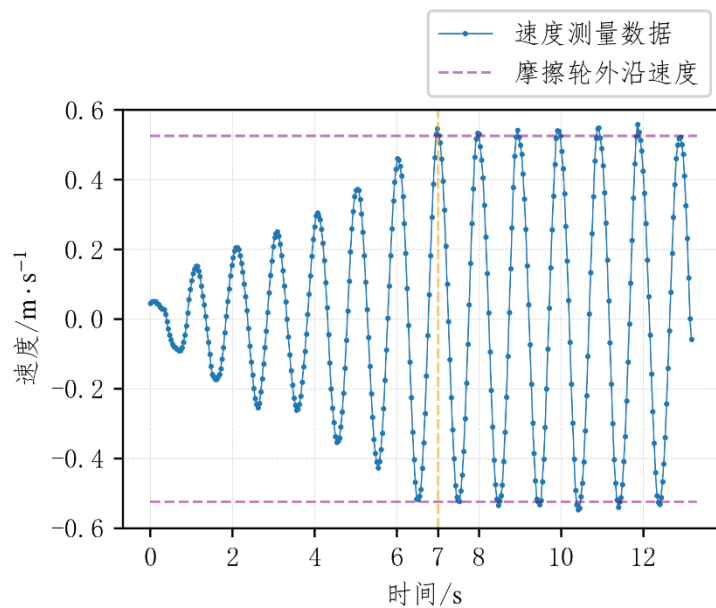


图 7: 振子运动典型情况: 速度随时间变化。  
摩擦轮转速为 $0.525\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

对图6中振子中心运动轨迹做差分, 可得图7所示的振子中心的运动速度随时间的变化。可以看出,  $0\sim 7\text{s}$ 内, 振子最大线速度逐渐增大,  $7\text{s}$ 后的最大线速度为一恒值。图中紫色虚线给出摩擦轮外沿的转动线速度。可以看出: 振子运动稳定时的最大线速度受摩擦轮外沿的转动线速度约束。

在我们的实验中, 在摩擦轮转速为约 $5\sim 65\text{rpm}$ 区间的某一定值时, 振子振幅和速度随时间的变化规律是共性的。当摩擦轮转速小于约 $5\text{rpm}$ 时, 因所用的直流电机的扭矩不足,

振子运动无明显规律性。当摩擦轮转速大于约65rpm时，振子会因质心运动至摩擦轮轮心外侧而发生单侧翘起的情况，破坏上述规律。图6和图7的结果表明，摩擦振子的振幅和最大平动速度都随着时间增加，直到被摩擦轮转动的线速度约束。本实验中摩擦副均为铝材，根据式(5)可知：摩擦振子从释放开始振幅逐渐增大到饱和的过程，表明摩擦系数随相对运动速度增大而减小。这个依赖关系用线性的一阶近似，能对振子运动规律给出较为满意的描述。

## 4.2 不同相对速度下的摩擦系数

图8给出摩擦副为铝材时，用IOLab的测力计功能测量得所不同相对速度下摩擦系数。图中误差棒对应测量数据的标准差，可见测量结果在低转速下的标准差更大。由图8结果可见摩擦系数随相对速度变化的整体趋势为：随相对速度上升而下降。用式(1)对图中数据进行拟合，我们得到 $k = 0.084(8)m^{-1} \cdot s$ 。这一结果证实了4.1中的结论：本实验中，振子振幅在初始阶段逐渐增大的原因，为摩擦系数随相对速度增大而减小。

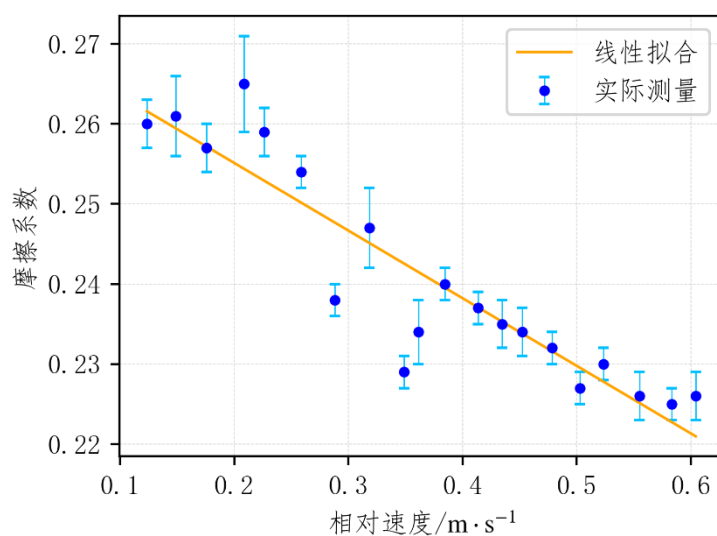


图 8: 摩擦系数随相对滑动速度的变化。摩擦副均为铝质材料。

## 5 结论

我们讨论了制作IYPT2020课题13要求的摩擦振子时的注意事项，给出一个实验结果可重复性良好的实验装置。振子的运动可分为振幅随时间增加的初始阶段和振幅几乎不变的稳

定阶段。初始阶段振幅随时间增加，说明摩擦系数随相对运动速度增大而减小。摩擦系数的定量测量结果证实了这一点。

## 致谢

本文作者感谢俞熹老师在课题研究的最初阶段提供的指导，感谢杭州大华科学仪器制造有限公司在实验设备制作过程中提供的支持。

## 参考文献

- [1] Wikipedia Contributors. Friction [Z/OL]. (2021-06-17)[2021-06-17].  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Friction>.
- [2] 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英, 等. 机械系统中摩擦模型的研究进展 [J]. 力学进展, 2008, 38(02): 201-213.
- [2] LIU L L, LIU H Z, WU Z Y, et al. An overview of friction models in mechanical systems [J]. Advances in Mechanics, 2008, 38(02): 201-213. (in Chinese)
- [3] 舒幼生. 力学 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.
- [4] 郑永令, 贾起民, 方晓敏. 力学(第3版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [5] Feynman R P, Leighton R B, Sands M. The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat[M]. Basic books, 2011.
- [6] IYPT 2020 Problems [EB/OL]. [2021-06-17].  
<https://www.iypt.org/problems/problems-for-the-33rd-iypt-2020/>.
- [7] 史雨川, 樊代和, 刘其军, 等. 一类摩擦振子现象的研究 [J]. 物理实验, 2021, 41(05): 30-35.
- [7] SHI Y C, FAN D H, LIU Q J, et al. Research on one kind of friction oscillator phenomenon [J]. Physics Experimentation, 2021, 41(05): 30-35. (in Chinese)
- [8] Tracker projects. Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education [EB/OL]. [2021-06-18]. <https://physlets.org/tracker/>.
- [9] Tracker projects. Tracker Help: Autotracker [EB/OL]. [2021-06-18].

<https://physlets.org/tracker/help/autotracker.html>.

[10] IOLab - An interactive Online Lab System [EB/OL]. [2021-06-18].

<https://www.iolab.science/>.

[11] 温诗铸, 黄平. 摩擦学原理(第2版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

## 作者简介

作者简介: 娄泽坤(2000-), 男, 河南洛阳人, 复旦大学物理学系2019级本科生。

[zklou19@fudan.edu.cn](mailto:zklou19@fudan.edu.cn)

通讯作者: 乐永康(1973-), 男, 浙江舟山人, 复旦大学物理学系教授, 博士, 从事物理实验教学研究。[leyk@fudan.edu.cn](mailto:leyk@fudan.edu.cn)